# Accompagner les élèves lors de la résolution de problèmes en mathématiques

Mireille Saboya, professeure à l'UQAM
Alexandre Ducharme Rivard, conseiller pédagogique, CSS Marguerite-Bourgeoys (CSSMB)
Lou-Anne Denis-Masson et Annie Beauchamp, enseignantes (CSSMB)
Mélanie Tremblay, professeure à l'UQAR, campus Lévis

# Naissance d’un projet de recherche collaborative entre la CSSMB, l’UQAM et l’UQAR

Notre projet a pris place au troisième cycle du primaire.

Questionnement initial des enseignants portait sur la réussite des élèves en résolution de problèmes .

- Des participants de divers milieux:
  - 35 enseignants et 4 orthopédagogues de sept écoles de Lachine (CSSMB)
  - 1 conseiller pédagogique (CSSMB)
  - 2 chercheurs (UQAM et UQAR) et deux assistantes de recherche

- Intention: co-construction et mise à l’essai d’interventions favorisant le développement d’un contrôle chez les élèves. (annexe VI);

# Objectifs du projet et de la présentation

Dans le cadre de la recherche collaborative, pendant nos rencontres réflexives, notre objectif était de :

Réfléchir et s'enrichir sur l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, particulièrement en résolution de problèmes.

Objectif de la présentation :

- Susciter une réflexion sur le potentiel de certaines interventions en nous appuyant sur des extraits vidéo et des exemples de situations.

Dans cette présentation, nous souhaitons vous partager les interventions suivantes :

1. Faire parler l'image

1. Jouer sur des variables didactiques pour amener l'élève à voir expliciter son raisonnement

# Recherches sur les élèves en difficultés d'apprentissage : vers le développement d'un contrôle

## Élèves avec des difficultés

- ➢ Fort accent mis sur la numération et peu de résolution de problèmes en particulier les élèves en difficultés (Cange et Favre 2003 ; Conne 1999 ; Cherel 2005 ; René de Cotret et Giroux 2003)
- ➢ Pourtant des difficultés recensées en résolution de problèmes…. (Hanin, 2018; Theis et Gagnon, 2013; Richard, 1996; Nguala, 2006; Fayol, 1990; Julo, 2002; Berends et Van Lesbout, 2009)

- ➢ Notre visée est de favoriser l'engagement des élèves et plus précisément, d'accroître leur sentiment de compétence travers l'expression d'un contrôle.
- ➢ Le développement d'une action contrôlée (Saboya, 2010, 2012, 2014)

  i) une réflexion de la part de l'élève sur toute action, sur tout choix tout au long du problème, au début, en cours ou à la fin de la résolution (annexe I)

  ii) une prise de distance par rapport à la résolution.

# Première intervention
# Faire parler l'image (#6)

- D'après vous que nous dit l'image?
- Que doit-on faire? Quelle est la tâche mathématique?
- Quelles sont les données nécessaires pour répondre à la tâche?
- Quels sont les concepts mathématiques en jeu, les possibles opérations à mobiliser, les étapes à réaliser?

## Les boites de chocolats

Cette image est-elle parlante?

5e année du primaire - Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques
Situation créée en 2015-2016 par des conseillers pédagogiques et enseignants
dans le cadre d'un projet régional rendu possible par les fonds coopératifs (03-12).

Mathématique

5e année du primaire

*Raisonner à l'aide de concepts et de processus mathématiques*

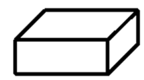
# Les boites de chocolats

https://www.online-stopwatch.com/countdown-timer/

Ludovic vend des boites de chocolats pour financer son camp d'hiver avec les Scouts.

Il doit vendre 295 boites de chocolats qui ont la forme d'un prisme à base carrée et qui ont les dimensions suivantes :

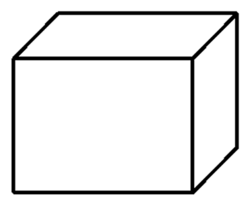
- longueur : 12 cm;
- largeur : 12 cm;
- hauteur : 8 cm.



* Attention! Les 3 images de boites ne sont pas à l'échelle.

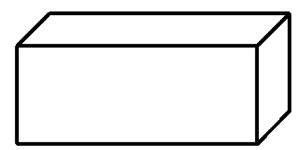
Il veut mettre ses boites de chocolats dans une seule grande boite pour faciliter le transport. Il trouve les deux grandes boites suivantes chez lui :

**Boite 1 :**



- longueur : 9 dm
- largeur : 8 dm
- hauteur : 0,6 m

**Boite 2 :**



- longueur : 12 dm
- largeur : 6 dm
- hauteur : 0,5 m

Afin d'éviter de briser les chocolats, il ne peut pas retourner les boites. Il doit les placer à plat dans la grande boite. Il peut cependant les empiler.

Ludovic pense qu'il peut choisir n'importe laquelle des deux boites pour transporter

# Création d’une image pour la faire parler

# Une analyse de la situation des chocolats

**Difficultés identifiées par l'enseignant**

- Vocabulaire : le mot « empiler »
- Prendre en compte les différentes contraintes :
  - 295 boîtes à placer
  - Ne pas retourner les boîtes, les empiler
- Conversion de mesures (surtout les 0,5 m et 0,6 m)
- Interpréter le résultat trouvé s'il est décimal : arrondir à l'entier inférieur
- Des difficultés calculatoires

Interventions possibles selon l'intention visée : annexe II

# Trois raisonnements possibles

1. Volume de la boîte de chocolats et des deux boîtes (raisonnement erroné)
2. Aire de la boîte de chocolats et des deux boîtes (raisonnement erroné)
3. Comparaison des mesures entre les boîtes (raisonnement attendu)

*Le détail des raisonnements se retrouve à l'annexe III.

# Qu’observe-t-on?

Raccourci Diapo 22

# Quelles adaptations pour les élèves en difficultés d'apprentissage?

Dispositif d'aide mis en place par Theis et al. (2014) : une séance de travail avec les élèves qui sont en difficultés d'apprentissage, deux jours avant la résolution de la situation en classe.

- Les élèves en difficultés ne sont plus perdus à cause du rythme qui est souvent pour eux accéléré.
- Ces élèves ont une longueur d'avance parce que le contexte de la situation est connu.
- Mise en garde : il ne faut pas aller trop loin dans la résolution de problème.

**Notre adaptation**

Ne pas leur donner l'énoncé de la situation, mais on a créé des tâches pour développer une visualisation au regard du sens spatial et du concept de volume.

# La boîte de chocolats : des interventions adaptées aux élèves en difficulté d'apprentissage

Dans chacune des deux classes, identification de 2 élèves.

- **Temps 1** : Une rencontre d'une durée de 10 à 20 minutes avec trois tâches ciblées pour travailler le sens spatial avec les élèves classés en difficultés d'apprentissage

- **Temps 2** : La situation des chocolats vécue en classe

  Prévision d'une activité de prolongement (annexe V) et d'une activité de relance.

- **Temps 3 :** Rencontre individuelle avec les élèves en difficultés d'approximativement 5 minutes pour avoir leurs impressions et pour relever s'ils ont été capables de faire des liens.

# Temps 1 : Une rencontre avec les élèves en difficultés - 3 ateliers

**Atelier 1**

Matériel
-Boite de matériel de base 10
-Décimètre cube transparent
-Papier-crayon disponible au besoin

**Atelier 2**

Matériel
-Billes, pois secs ou macaronis
-Décimètre cube transparent
-Papier-crayon disponible au besoin

**Atelier 3**

Matériel
-Série de romans identiques
-Boite en carton quelconque
-Papier-crayon disponible au besoin

Questions posées aux élèves

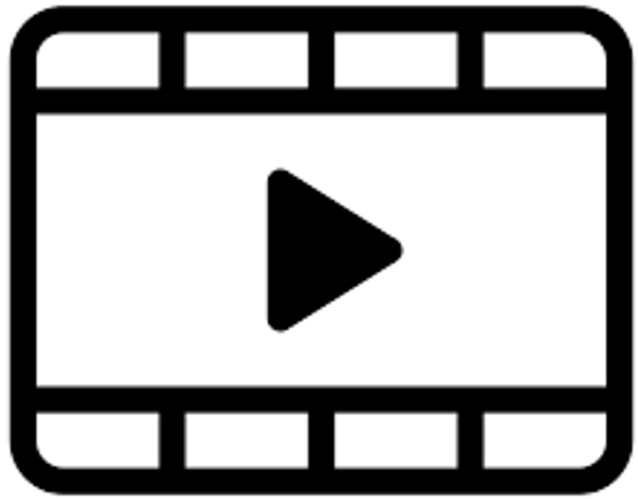
D'après toi, combien de cubes/billes/pois secs/macaronis/romans pourront rentrer dans le cube transparent?
Question de relance : moins de 100, entre 100 et 500, entre 500 et 1000, plus de 1000, plus de 2000...
Combien de centicubes/etc. puis-je mettre dans la boîte?
Comment puis-je faire pour trouver la réponse? Quelle expression mathématique utiliseras-tu?

## Temps 2 : La boite de chocolats vécue en classe

Possibilité d'ajouter d'autres tâches comme :

- Une activité de prolongement (annexe IV)
- Une activité de relance

## Temps 3 : Rencontre avec les élèves en difficultés



# Temps 2 : Activité de relance

## Cinquième intervention

## Jouer sur des variables didactiques pour montrer à l'élève que son raisonnement est erroné (#11)

Pourquoi la stratégie du volume ne fonctionne pas? Comment s'en convaincre?

On utilise du matériel. Variable didactique : On modifie les nombres en jeu (on prend ceux de vraies boites qu'on a en main).

Matériel :

- Des boîtes de chocolat Merci qui sont des prismes à base carrée
- Une grande boite (plus grande que celle des chocolats Merci mais pas trop grande)
- Une règle

| Dimensions boite de chocolats Merci | Dimensions de la grande boite |
|---|---|
| L = 15 cm<br>l = 15 cm<br>h = 1 cm<br><br>V = 15 x 15 x 1 = 225 $cm^3$ | L = 24,5 cm<br>l = 16,5 cm<br>H = 10,5 cm<br><br>V = 24,5 x 16,5 x 10,5 = 4244,625 $cm^3$ |

# Pourquoi la stratégie du volume ne fonctionne pas?

Pour trouver le nombre de boites de chocolats Merci qui rentrent dans la boite on fait :

$$\frac{4244{,}625}{225} = 18{,}865$$

Donc 18 boites de chocolats Merci rentrent dans la grande boite.

Mais en réalité on ne peut pas en mettre plus que 10 boites.

Qu'est-ce qui se passe?

Explications : si on revient à la définition du volume, c'est la mesure de l'espace occupé mais cet espace occupé n'est pas forcément en un seul bloc. On peut couper notre boîte en morceaux et calculer le volume et on aura encore le même volume. C'est pour ça que la stratégie du volume nous dit combien de boîtes de chocolats Merci on peut rentrer dans la grande boite si on se donne le droit de couper ces boîtes. La formule du volume maximise les trous, l'espace inoccupé.

# CONCLUSION

Objectif de la présentation :

➢ Susciter une réflexion sur le potentiel de certaines interventions pour développer un contrôle chez les élèves en nous appuyant sur des extraits vidéo et des exemples de situations.

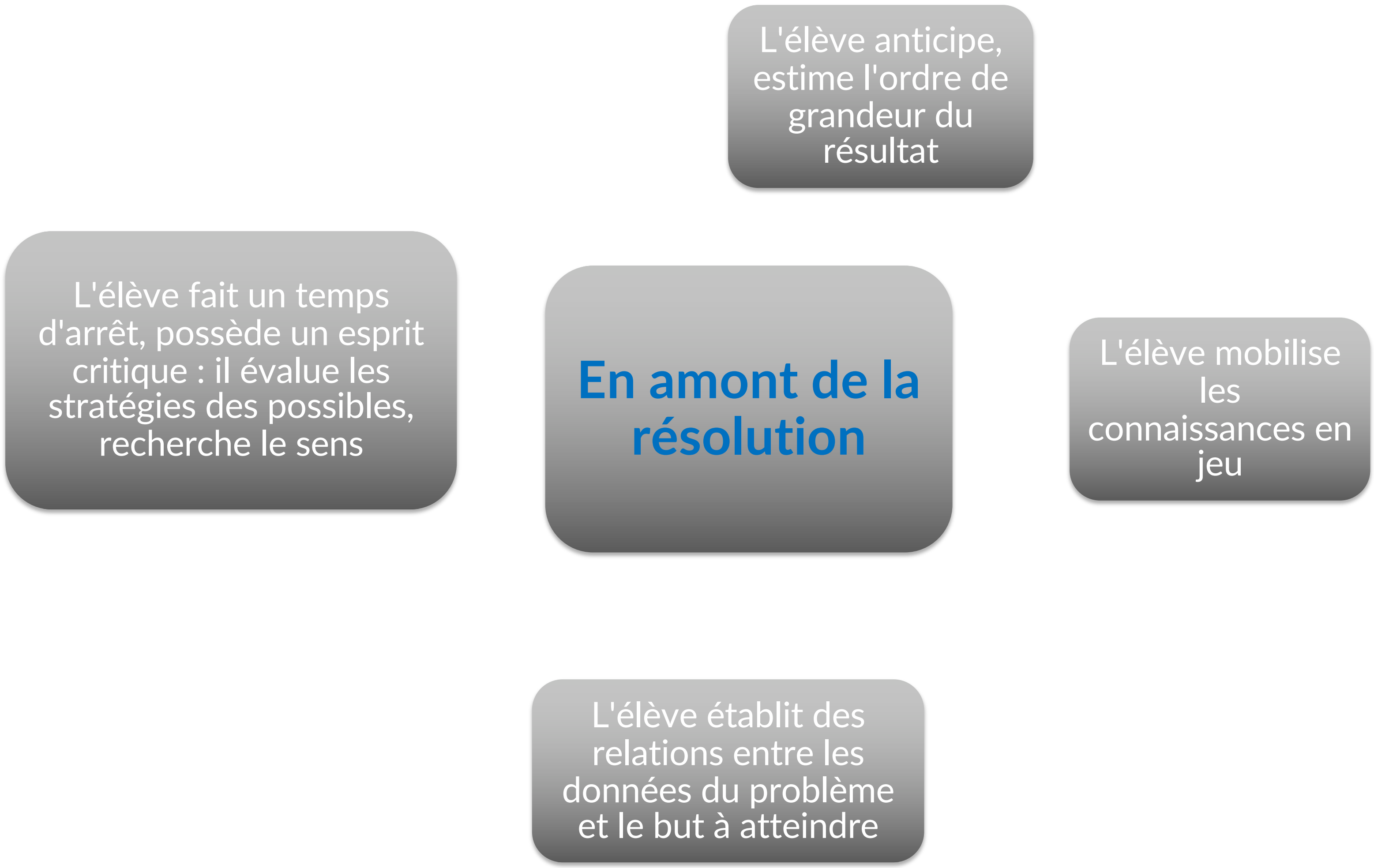
Ainsi, pour développer un contrôle chez élèves, deux réflexions pour planifier l'animation d'une situation :

1. Penser à quelles interventions privilégier
2. Penser à une séquence avec différentes tâches :
   - Des tâches en amont (pour préparer les élèves)
   - Des relances selon la prévision de certaines conduites
   - Des tâches de prolongement (pour les élèves qui vont plus rapidement)
   - Une réflexion a posteriori sur la situation avec les élèves : qu'ont-ils retenu?

# Annexe I

Une incursion dans le concept de contrôle...

Que recouvre le contrôle chez les élèves?


L'élève anticipe, estime l'ordre de grandeur du résultat
L'élève fait un temps d'arrêt, possède un esprit critique : il évalue les stratégies des possibles, recherche le sens
En amont de la résolution
L'élève mobilise les connaissances en jeu
L'élève établit des relations entre les données du problème et le but à atteindre

L'élève prend des décisions sur la direction à prendre, détecte la stratégie la plus efficace.

**En cours de processus**

L'élève réinvestit des stratégies utilisées précédemment.

L'élève procède à des évaluations périodiques tout le long de la résolution.

L'élève fait un travail rétrospectif : vérification du résultat pour acquérir une certitude

# En aval de la résolution

L'élève est capable de percevoir ses erreurs et de les corriger.

L'élève retourne à la question du problème. Il évalue la démarche adoptée, le choix de la méthode.

Retour

# Annexe II

Pour aller plus loin....

Une réflexion quant au choix de l'intention pédagogique que nous ciblons

# Une analyse de la situation des chocolats : intentions pédagogiques ciblées

**Raisonnement erroné :** pour trouver le nombre de boîtes de chocolats nécessaires, on calcule le volume de deux boites, le volume de la boîte de chocolat et on divise le volume de chacune des boites par le volume de la boîte de chocolat.

**Difficultés :**

- Vocabulaire : le mot « empiler »
- Prendre en compte les différentes contraintes :
  - 295 boites à placer
  - Ne pas retourner les boites, les empiler
- Conversion de mesures (surtout les 0,5 m et 0,6 m)
- Interpréter le résultat trouvé s'il est décimal : arrondir à l'entier inférieur
- Des difficultés calculatoires

On ne peut pas s'attaquer à toutes les difficultés ici présentes sans s'y perdre. Il faut faire un choix.
Notre intention : travailler sur le raisonnement erroné.

Clarifier le vocabulaire et les contraintes avec les élèves.

Faire les conversions avec les élèves et les laisser au tableau

Utilisation de la calculatrice.

Retour

# Annexe III

Résolution de la situation des boites de chocolats

Présentation de différentes raisonnements :

- Comparaison de **volumes**
- Comparaison d'**aires**
- Comparaison de **longueurs**

# Résolution de la situation de la boite de chocolats

Conversions de certaines mesures pour se retrouver avec une même unité : nous avons choisi des cm (pour ne pas avoir des nombres décimaux qui peuvent être problématiques car risque d’erreurs calculatoires).

| Mesures de la boite de chocolats | Mesures de la boite 1 | Mesures de la boite 2 |
|---|---|---|
| L = 12 cm<br>l = 12 cm<br>h = 8 cm | L = 90 cm<br>l = 80 cm<br>h = 60 cm | L = 120 cm<br>l = 60 cm<br>h = 50 cm |

# Stratégie Comparaison de volumes

| Volume de la boite de chocolats | Volume de la boite 1 | Volume de la boite 2 |
| --- | --- | --- |
| $V_C = 1\ 152\ cm^3$ | $V_{B1} = 432\ 000\ cm^3$ | $V_{B2} = 360\ 000\ cm^3$ |

$\frac{VB1}{Vc} = \frac{432\ 000}{1\ 152} = 375$

$\frac{VB2}{Vc} = \frac{360\ 000}{1\ 152} = 312{,}5$. On arrondit à l'entier inférieur : 312.

Comment amener les élèves à voir que cette stratégie n'est pas bonne??

Ludovic a raison!!

On peut mettre les 295 chocolats dans les deux boites!

# Stratégie Comparaison d'aires

| Aire de la base de la boite de chocolats | Aire de la base de la boite 1 | Aire de la base de la boite 2 |
|---|---|---|
| $A_C = 144\ cm^2$ | $A_{B1} = 7\ 200\ cm^2$ | $A_{B2} = 7\ 200\ cm^2$ |

$\frac{AB1\ ou\ AB2}{Ac} = \frac{7\ 200}{144} = 50$

$\frac{hauteur\ de\ la\ boite\ B1}{hauteur\ de\ la\ boite\ de\ chocolats} = \frac{60}{8} =$ 7,5 donc 7 boites en hauteur.
On aura en tout : 50 x 7 = 350 boites de chocolats qui rentrent.

$\frac{hauteur\ de\ la\ boite\ B2}{hauteur\ de\ la\ boite\ de\ chocolats} = \frac{50}{8} =$ 6,25 donc 6 boites en hauteur.
On aura en tout : 50 x 6 = 300 boites de chocolats qui rentrent.

Ludovic a raison!!

On peut mettre les 295 chocolats dans les deux boites!

Comment amener les élèves à voir que cette stratégie n'est pas bonne??

# Stratégie Comparaison de longueurs

Ludovic n'a pas raison!!

On ne peut mettre les 295 chocolats que dans la deuxième boite!

| Pour la boite 1 | Pour la boite 2 |
|---|---|
| $\frac{Longueur\ de\ la\ boite}{longueur\ boite\ chocolats} = \frac{90}{12} = 7{,}5$ <br> On peut rentrer 7 boites de chocolats en longueur, il va rester de l'espace. <br><br> $\frac{Largeur\ de\ la\ boite}{largeur\ de\ la\ boite\ de\ chocolats} = \frac{80}{12} = 6{,}666\ldots$ <br> On peut rentrer 6 boites en largeur. Il va rester de l'espace <br><br> $\frac{Hauteur\ de\ la\ boite}{hauteur\ de\ la\ boite\ de\ chocolats} = \frac{60}{8} = 7{,}5$ <br> On peut rentrer 7 boites en hauteur. <br><br> En tout je vais avoir : 7 x 6 x 7 = 294 boites | $\frac{Longueur\ de\ la\ boite}{longueur\ boite\ chocolats} = \frac{120}{12} = 10$ <br> On peut rentrer 10 boites de chocolats en longueur, il va rester de l'espace. <br><br> $\frac{Largeur\ de\ la\ boite}{largeur\ de\ la\ boite\ de\ chocolats} = \frac{60}{12} = 5$ <br> On peut rentrer 5 boites en largeur. <br><br> $\frac{Hauteur\ de\ la\ boite}{hauteur\ de\ la\ boite\ de\ chocolats} = \frac{50}{8} = 6{,}25$ <br> On peut rentrer 6 boites en hauteur. <br><br> En tout je vais avoir : 10 x 5 x 6 = 300 boites |

Retour

# Annexe IV

Questions de réflexion

Pour aller plus loin.

# Des questions pour poursuivre la réflexion

- Discussion possible : quand est-ce qu'on peut utiliser la formule du volume?
  - Si objets qui rentrent exactement dans la boite
  - Si on met un liquide
  - Si on met du sable
    - En gros quand on peut occuper tout l'espace disponible

- Ces interventions s'appliquent à des C1 et des C2

- À quel moment de l'année peut-on donner cette situation?

- Important d'avoir vu les concepts avant ou non?

- Fréquence des activités de résolution de problèmes en classe

- Faire le parallèle essentiel entre l'application des stratégies de lecture et la compréhension des situations mathématiques

# Annexe V

Les boîtes de chocolat

Proposition d'une activité de prolongement

# Activité de prolongement en groupe classe

Matériel

-Trois boîtes identiques en carton. La première reste intacte; la seconde est coupée en deux sur le sens de la longueur; la troisième est coupée en deux sur le sens de la largeur.

-Une collection de romans.

-Papier-crayon disponible au besoin

Déroulement

Informer les élèves que nous avons coupé une boite de deux façons différentes.

Donner les dimensions aux élèves : les amener à calculer le volume de chacune des boîtes pour qu'ils constatent que le volume est le même.

Combien de romans vais-je pouvoir rentrer dans chacune des boîtes?

> Prédire
>
> Expérimenter : deux stations d'expérimentation sont disponibles dans la classe où l'on dépose quelques romans et les demi-boîtes. Les élèves sont libres d'aller faire des tests ou non.

# Activité de prolongement en groupe classe

Questions à poser aux élèves

Quel est le volume de chacune des boîtes? (donner les mesures des boîtes)

Combien de livres pourront rentrer dans chacune des boîtes?

Quelle expression mathématique représente la démarche effectuée?

Est-ce que ça correspond à ce que tu avais prédit? Si non, pourquoi?

Notes à l'enseignant

On s'attend à ce que plusieurs élèves disent que, comme il s'agit du même volume, le même nombre de livres rentrera dans la boîte.

Vérifier si nos élèves «en difficulté» font des liens avec les ateliers du temps 1.

Retour

# Annexe VI

Retour sur le projet
Document explicatif

## Pistes d'interventions co-construites entre intervenants de la CSMB et des chercheurs visant le développement d'un contrôle chez les élèves lors de la résolution de problèmes

Nous rapportons ici quelques unes de la trentaine d'interventions co-construites. Celles-ci sont une retombée du projet de recherche qui a pris place pendant deux années consécutives. Elles prennent place à différents moments lors de la résolution de problèmes : avant, pendant et après la résolution. Certaines de ces interventions peuvent s'inscrire dans différents moments, c'est pourquoi elles sont répétées dans les différentes sections. D'autres interventions touchent à la planification et aux modalités de gestion de classe. Prenez note que nous avons gardé la numérotation originale des interventions. Plusieurs interventions peuvent être jumelées ensemble lors de la résolution d'un problème, c'est à chaque enseignant de choisir comment il veut mener la période de résolution de problèmes, tous les agencements sont possibles.

# Liste d’interventions

## Avant la résolution de la situation

*Intervention 1* : Enlever le crayon aux élèves au début de la résolution pour qu’ils réfléchissent au problème.

*Intervention 2* : Pour la phase d’appropriation, animer un jeu de rôles, mimer le contexte, faire vivre une pièce de théâtre.

*Intervention 5* : Pour les problèmes complexes, avant la résolution, prévoir les étapes pour résoudre le problème : les bandelettes de papier.

*Intervention 6* : Avant toute résolution, faire parler l’image.

*Intervention 19* : Mettre les élèves en dyades pour discuter de la compréhension du problème et également pour discuter autour des démarches de résolution.

*Intervention 20* : Donner la solution aux élèves avant ou pendant la résolution.

# Liste d’interventions

## Pendant la résolution de la situation

***Intervention 11* : Jouer sur les variables didactiques pour intervenir sur un raisonnement erroné. Plusieurs choix sont possibles. On peut modifier les données de telle sorte qu’en appliquant le raisonnement non valide avec des données, l’élève s’aperçoit qu’il y a une contradiction donc une erreur. Une autre façon de procéder serait de modifier le problème pour qu’il corresponde au raisonnement erroné produit par l’élève puis on compare les deux problèmes.**

***Intervention 18* : Résolution d’un problème en équipes autour d’un seul appui visuel (grand carton, ardoise,…), chaque élève ayant un crayon de couleur différente.**

***Intervention 19* : Mettre les élèves en dyades pour discuter de la compréhension du problème et également pour discuter autour des démarches de résolution.**

# Liste d'interventions

## Après la résolution de la situation

*Intervention 15* : **Dans le retour en grand groupe, présenter les erreurs les plus fréquentes pour amener une discussion avec les élèves.**

*Intervention 16* : **Dans le retour en grand groupe, prévoir les élèves qui vont passer au tableau selon ce qu'ils ont produit mais également selon leur personnalité (ne pas les brusquer).**

*Intervention 17* : **Dans le retour en grand groupe, publiciser les résolutions des élèves à l'aide de grands cartons que l'on affiche. Les élèves doivent se prononcer sur les résolutions de leurs collègues.**

# Liste d’interventions

## Planification et modalités de gestions de classe

*Intervention 21* : Faire des ateliers de résolution de problème régulièrement (un par semaine).

*Intervention 22* : Préparer des problèmes avec différents niveaux de complexité. On les identifie avec des couleurs. On donne aux élèves des problèmes selon son niveau de performance.

*Intervention 24* : Possibilité de travailler des problèmes par station avec différents niveaux de difficulté. Les élèves se déplacent d’une station à l’autre pour résoudre un problème donné. On peut leur fournir des indices, si nécessaire, pour les problèmes.

*Intervention 27* : Résoudre des problèmes dont le niveau de complexité est varié, simples et complexes, hebdomadairement. Pour les problèmes complexes, en faire dès le début de l’année, même si la notion mathématique n’a pas été travaillée préalablement.

*Intervention 28* : Faire composer des problèmes aux élèves.

*Intervention 30* : Prendre une image et demander aux élèves d’élaborer un problème qui s’appuie sur cette image. Les problèmes rédigés par les élèves sont par la suite distribués aux autres élèves de la classe pour qu’ils les résolvent.